

# 1. Zápočtová Písemka B NOFY151, 2025-26

Jméno a přímení:.....

vyplní student

.....%

nevyplní student

## Otázky

1. Spočtete následující limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left[ \cos \left( \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 2} \right) \right]^{\frac{1}{x^2}}$$

(váha : 6)

2. Spočtete derivaci následujícího výrazu všude, kde to jde

$$x \cos(x^2) \sin(e^x)$$

(váha : 4)

## Písanka B vzorové řešení

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \cos \left( \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 2} \right) \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{Máme } \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 2} &= \frac{\left( \sqrt{\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 2} \right) \left( \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x} - 2} \right)}{\sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{\frac{1}{x} - 2}} \\ &= \sqrt{x} \frac{2}{\sqrt{1} + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \end{aligned}$$

Použijeme vzorec  $a^b = e^{b \ln a}$  a použijeme limitu v mocnině

$$\begin{aligned} \textcircled{X} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} \ln \left( 1 + \left( \cos \left( \sqrt{x} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) - 1 \right) \right) &= \frac{\cos \left( \sqrt{x} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) - 1}{\underbrace{\cos \left( \sqrt{x} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \right) - 1}_{\textcircled{A}}} \cdot \underbrace{\frac{x \cdot 4}{(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}})^2}}_{\textcircled{B}} \end{aligned}$$

limity  $\textcircled{A}$  a  $\textcircled{B}$  mají hodnotu 1 a  $-\frac{1}{2}$  díky známým limitám  $\frac{\ln(1+t)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 1$

a  $\frac{1 - \cos(\theta)}{\theta^2} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{2}$  a VOLSF (a VOAL)

Zbývá spočítat  $\frac{x}{x^2} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \infty$  díky VOAL.

Celkem tedy dostaneme

$\ominus \rightarrow -\infty$ . Tudiž počítáme pomocí VOLSF, že

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{\frac{1}{x} - 2}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0.$$

② Spočítáme  $f'$  kde  $f(x) = x \cos(x^2) \sin(e^x)$

Všimneme si, že  $D_f = \mathbb{R}$ . Spočítáme derivaci pomocí derivace součinu (opakované) a řetězové pravidlo, tedy

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x \cos(x^2))' \sin(e^x) + x \cos(x^2) (\sin(e^x))' \\ &= [\cos(x^2) + x (-\sin(x^2) 2x)] \sin e^x + x \cos(x^2) \cos(e^x) \cdot e^x \end{aligned}$$

platí pro všechny  $x \in \mathbb{R}$  protože existují derivace všech funkcí na celém  $\mathbb{R}$ .